

FUNCTIA DE GRADUL II

1. Forma generala $f: A \rightarrow B, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

2. Graficul functiei este o parabola cu varful $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

3. Maximul / minimul functiei

1. Daca $a > 0 \Rightarrow f$ are minim $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ iar punctul de minim este $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

2. Daca $a < 0 \Rightarrow f$ are maxim $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ iar punctul de maxim este

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

4. Intersectiile G_f cu axele de coordonate

$$G_f \cap O_x = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$$

$$G_f \cap O_y = C(0, c)$$

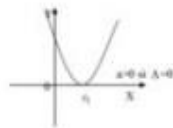
x_1, x_2 sunt radacinile ecuatiei $ax^2 + bx + c = 0$.

5. Imaginea functiei

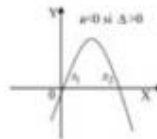
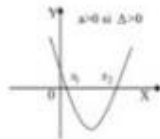
$$\Im_f = \begin{cases} (-\infty; -\frac{\Delta}{4a}], & a < 0 \\ [-\frac{\Delta}{4a}; +\infty) & a > 0 \end{cases}$$

6. Axa de simetrie pentru G_f este dreapta $x = -\frac{b}{2a}$.

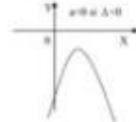
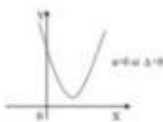
7. Pozitiile relative ale G_f fata de O_x ,



$$\left. \begin{array}{l} G_f \cap O_x = V \\ G_f \text{ tangent } O_x \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = 0$$



$$G_f \cap O_x = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$$



$$G_f \cap O_x = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$$

1. Să se determine funcția de gradul al doilea știind că:
 - a) $f(-1) = 1, f(0) = 1, f(1) = 3$.
 - b) Graficul său trece prin punctele $A(0,3), B(1,-1), C(-1,4)$.
2. Să se precizeze minimul sau maximum funcțiilor:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 + x + 1$.
 - c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 4$.
 - d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m+1)x^2 - mx + 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 - a) Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ știind că valoarea minimă a funcției este 1.
 - b) Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ știind că valoarea maximă a funcției este 2.
 - c) Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ știind că f admite punctul de minim $x = \frac{1}{2}$.
 - d) Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ știind că f admite punctul de maxim $x = 2$.
4. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 5$.
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 + 2x + 1$.
 - c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 4$.
 - d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + x + 2$.
6. Să se determine funcția de gradul al doilea știind că:
 - a) $V(1,1)$ și că $A(2,2) \in G_f$.
 - b) Graficul său trece prin $A(-1,13), B(2,7)$ și admite un minim egal cu 5.
 - c) 1 este punct de minim, valoarea minimă este 2 și graficul intersectează Oy în punctul de ordonată 3.
7. Se consideră familia de funcții de gradul 2 $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 + x + m, m \in \mathbb{R}$.

Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că:

- a) vârfului parabolei asociate se găsește pe dreapta $y = x + 2$.
 - b) vârfului parabolei asociate se găsește pe cercul $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.
 - c) vârfului parabolei asociate se găsește pe parabola $y = x^2 + x + 2$.
 - d) vârfului parabolei asociate este situat deasupra dreptei $y = 2$.
 - e) vârfului parabolei asociate este situat sub dreptei $y = -1$.
8. Aflați curba pe care este situat vârfului parabolei asociate familiei de funcții de gradul 2 :
- a) $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 + (m-1)x + 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - b) $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = -2x^2 + mx - m + 2, m \in \mathbb{R}$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m - 1)x^2 - (2m + 1)x + 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ știind că graficul lui f admite axa de simetrie:

a) $x = 2$, b) $x = -\frac{1}{2}$, c) $x = 3$.

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m - 1)x^2 - (2m + 1)x + m, m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ știind că:

- a) graficul lui f este tangent axei Ox .
- b) graficul lui f intersectează axa Ox în două puncte.
- c) graficul lui f nu intersectează axa Ox .
- d) graficul lui f este situat sub axa Ox .

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m + 1)x^2 - (m + 1)x + 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Determinați $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ știind că:

- e) graficul lui f este tangent axei Ox .
- f) graficul lui f intersectează axa Ox în două puncte.
- g) graficul lui f nu intersectează axa Ox .
- h) graficul lui f este situat deasupra axei Ox .

12. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că:

- a) $mx^2 - 2x + m < 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- b) $mx^2 - (m + 1)x + m > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- c) $(m - 3)x^2 - mx - m \leq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- d) $x^2 + mx - 2m \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- e) $mx^2 + 2(m - 1)x + m - 1 < 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- f) $mx^2 + x - 1 > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- g) $(2 - m)x^2 + 4mx - 4m - 1 > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- h) $(m - 3)x^2 - 2x + 1 \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- i) $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 < 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.

13. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că:

- a) $x^2 + y^2 - x - 3y + a > 0, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$
- b) $2x^2 + 3y^2 - 2x - 3y + a + 1 > 0, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$
- c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a > 0, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$

14. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că:

- a) $-2 \leq \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- b) $-3 \leq \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- c) $\left| \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3, (\forall)x \in \mathbb{R}$.